Günter Hildebrandt, guenter22@arcor.de

Wirkungsgrad des Propellers

Als Modellbauer und –flieger, habe ich mir schon oft die Frage gestellt, wie man den Wirkungsgrad eines Propellers berechnen kann und welchen Vorteil ein großer Propeller gegenüber einem kleinem hat. Da ich die Berechnungen, die ich hiermit vorstelle, so bisher nicht gefunden habe, möchte ich meine Überlegungen hier mal zusammenfassen.

Das Drehmoment M, welches erforderlich ist, um einen Propeller mit der Drehzahl N zu drehen, wächst quadratisch mit der Drehzahl an: $M \sim N^2$. Die mechanische Leistung P_w, die ein Motor auf einer Welle abgibt, berechnet sich aus

$$P_w=N*M \quad (1).$$

Daraus folgt, daß die mechanische Leistung proportional zur dritten Potenz der Drehzahl wächst: $P_w \sim N^3$. Mit Hilfe eines Faktors könnte man aus dieser Proportionalität eine Gleichung machen. In der Praxis gibt man jedoch die Drehzahl eines Propellers an, die erreicht wird, wenn eine mechanische Leistung von 100 Watt auf der Welle abgegeben wird. Bezeichnen wir diese Drehzahl mit N_{100} so kann folgende Gleichung aufgestellt werden:

$$P_w/100W = (N/ N_{100})^3. \quad (2)$$

Diese Gleichung kann man nach N_{100} auflösen und erhält:

$$N_{100} = N*(100W/ P_w)^{1/3} \quad (3)$$

Mit diese Gleichung kann man für ein Meßwert der aus der Drehzahl N und der zugehörigen mechanische Leistung P_w besteht, den Wert N_{100} berechnen. Der Wert N_{100} ist eine Konstante für einen zugehörigen Propeller. Wenn man diesen N_{100} Kennwert eines Propellers kennt, so kann man für die zugehörige Leistung auch die resultierende Drehzahl im Stand berechnen.

$$N = N_{100}*(P_w/100W)^{1/3} \quad (4)$$

Bei einer Verdopplung der Drehzahl steigt die benötigte Leistung um das 8-fache. Eine Verdopplung der Leistung führt zu einer Erhöhung der Drehzahl um den Faktor 1,26.

Die Leistung P_m, die durch den Propeller auf das Modell übertragen wird, berechnet sich nach

$$P_m = v*F. \quad (5)$$

wobei v die Fluggeschwindigkeit des Modells ist und F die Schubkraft, die der Propeller erzeugt. Den Wirkungsgrad des Propellers definieren wir als Quotienten zwischen der auf das Modell übertragenen Leistung P_m und der mechanischen Leistung P_w, die der Motor abgibt:

$$=P_m/P_w. \quad (6)$$

Die Maximalgeschwindigkeit, die das Modell im Kraftflug fliegen kann, ergibt sich nach

$$v_m = H * N/60 \quad (7)$$

wobei H der Anstieg (die Steigung) des Propellers in Meter und N die Drehzahl in upm sind. Damit kann man zwei Flugzustände definieren, in dem die an das Modell abgegebene Leistung gleich 0 ist. Erstens wenn sich das Modell nicht bewegt (v=0) und zweitens, wenn es sich mit v_m bewegt (F=0). Irgendwo dazwischen gibt es ein Maximum. Um die Frage zu klären, wo dieses Maximum liegt, benötigt man den Zusammenhang zwischen der Schubkraft und der Anströmgeschwindigkeit des

Propellers (gleich Fluggeschwindigkeit). Dieser Zusammenhang wurde schon in den 30-iger Jahren meßtechnisch erfaßt und in normierter Form dargestellt.

Um die folgenden Diagramme zu verstehen, müssen folgende Normierungen eingeführt werden. Der "Coefficent of Thrust" C_T ist wie folgt definiert:

$C_T = S/(\quad (N/60)^2 * D^4)$ (8)

wobei S die Schubkraft im Stand ist, ρ die Dichte der Luft (1,25 kg/m³), N die Drehzahl in upm und D der Durchmesser der Luftschraube in Metern sind. Bei konstanter Drehzahl, stellt C_T eine normierte Schubkraft dar.

Weiterhin benötigen wir den Fortschritt

$J=v/((N/60)*D)$ (9)

wobei v die Modellgeschwindigkeit und D der Durchmesser der Luftschraube sind. J beschreibt also das Verhältnis zwischen Modell- und Blattspizengeschwindigkeit wobei die Konstante π fehlt. Bei konstanter Drehzahl ist J proportional zur Modellgeschwindigkeit.

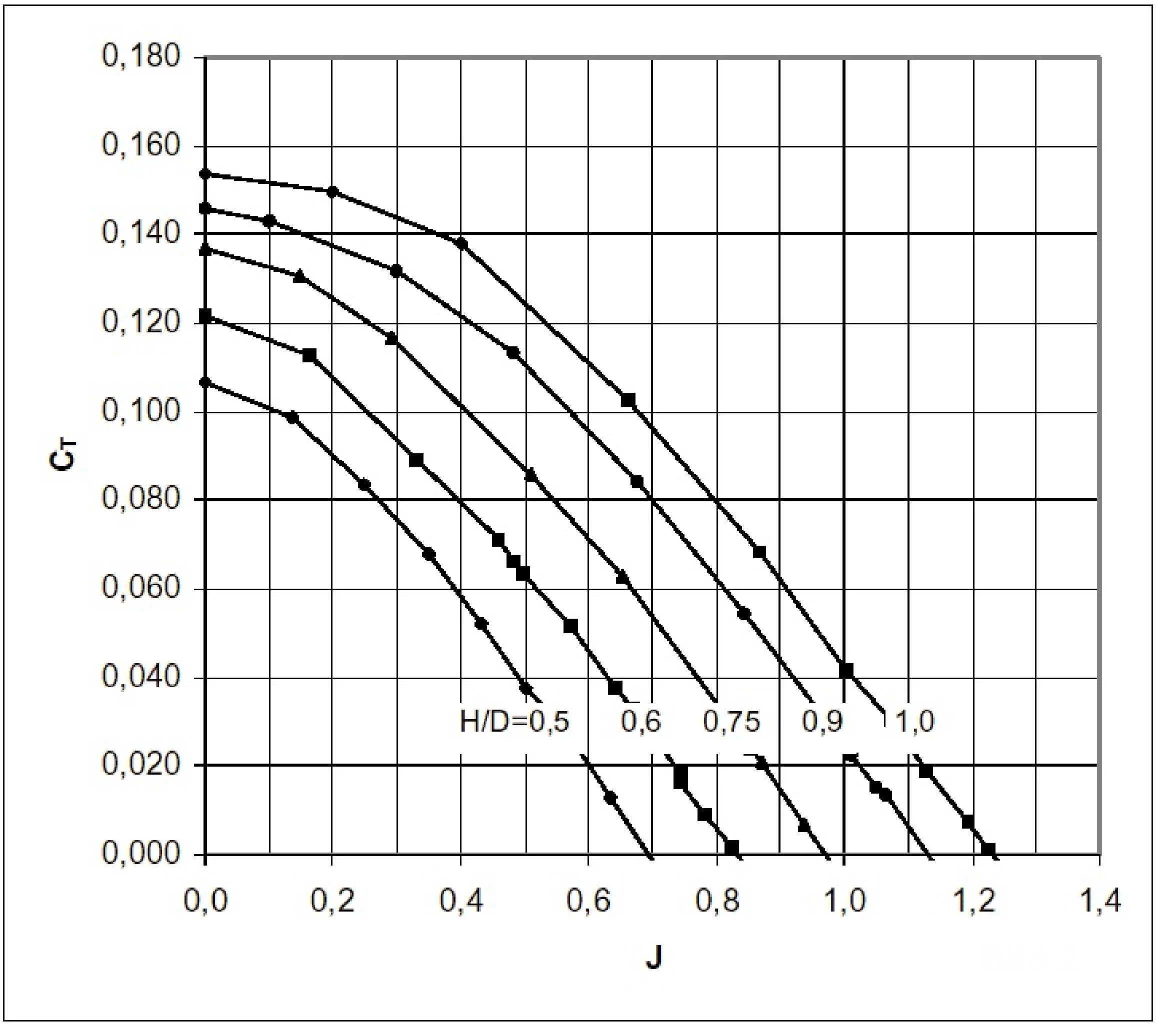


Abb. 1: Gemessener Zusammenhang zwischen C_T und J

Wenn man die Fluggeschwindigkeit v auf die maximale Fluggeschwindigkeit v_m normiert, kann man den normierten Wert

$a = v/v_m$ (10)

einführen. Der Wert a ist proportional zur Fluggeschwindigkeit und liegt zwischen 0 und 1. Diese Gleichung könnte man auch wie folgt schreiben:

$v = a * v_m$. (11)

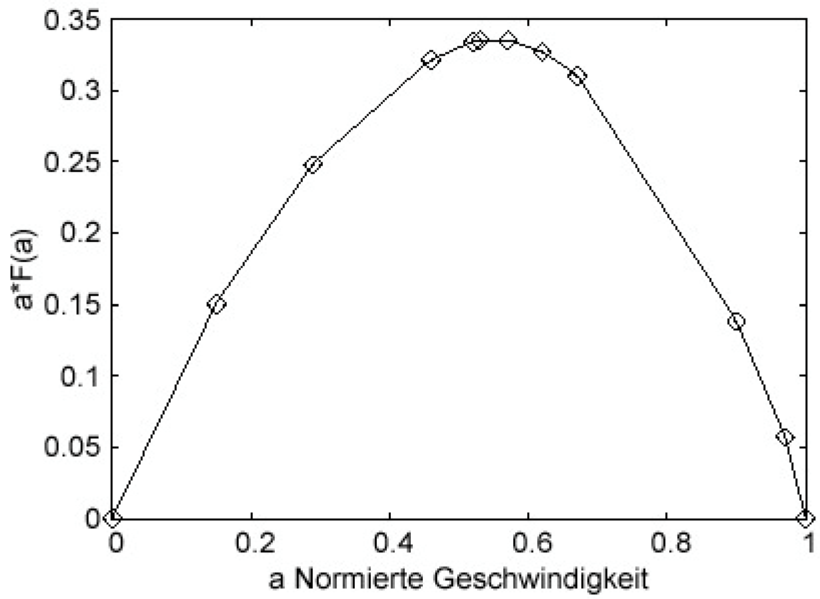
Die Schubkraft kann man dann wie folgt ausdrücken

$F = S * f(a)$, (12)

wobei S die Schubkraft im Stand ist und f(a) der normierten Funktionen entsprechend Abbildung 1 entspricht. Die Funktion f(a) ist für f(0)=1 und für f(1)=0. Mit diesen Gleichungen kann man die an das Modell abgegebene Leistung wie folgt ausdrücken:

$P_m = v*F = a * v_m * S * f(a)$. (13)

Für ein konstante Drehzahl sind der Standschub S und v_m Konstanten. Durch eine Kurvendiskussion des Terms a*f(a) kann man klären, wie das optimale Verhältnis zwischen der Fluggeschwindigkeit v und der theoretischen Strömungsgeschwindigkeit v_m sein muß, um eine optimale Leistung an das Modell abzugeben. Da die Funktion f(a) nicht als analytischer Ausdruck vorliegt, berechnen wir diesen Term anhand der Meßwerte aus Abbildung 1.



Die Abbildung 2 stellt a*f(a) für H/D=0,75 dar. Aus der Abbildung 2 folgt, daß die Funktion a*f(a) ein recht flaches Maximum bei a=0,55 hat. Wobei im Bereich von 0,42 bis 0,66 nur ein Abfall der Leistungsabgabe von ca. 10% erfolgt. Daraus folgt, daß die theoretische Strömungsgeschwindigkeit v_m so gewählt werden muß, daß sie 1,5 bis 2,4 mal größer ist, als die Fluggeschwindigkeit des Modells im Kraftflug. Diese Aussage stimmt mit Angaben aus der Literatur überein, die einen Faktor von 1,5 bis 2 vorschlagen. Im weiteren gehen wir davon aus, daß der Propeller im Optimum bei a = 0,55 betrieben wird. a*f(a) hat dann einen Wert von $f_{opt} = 0,33$.

Damit ergibt sich für die an das Modell abgegebene Leistung wie folgt:

$P_m = f_{opt} * v_m * S$. (14)

v_m kann man nach Gleichung (7) durch die Drehzahl ausdrücken. Der Standschub S ist proportional zum Quadrat der Drehzahl:

$S = C_T * \quad * (N/60)^2 * D^4$. (15)

Für P_m ergibt sich damit:

$P_m = f_{opt} * C_T * \quad * (N/60)^2 * D^4 * H * N/60$. (16)

Die Wellenleistung ergibt sich zu $P_w = 100W * (N/ N_{100})^3$. Damit haben wir nun eine Gleichung für den Wirkungsgrad des Propellers:

$\eta = P_m/P_w = f_{opt} * C_T * \rho * D^4 * H/(100W * (60/N_{100})^3)$ (17)

In dieser Formel wurde die Drehzahl gekürzt. Die Parameter D und H sind die geometrischen Abmessungen der Luftschraube, ρ ist die Luftdichte, f_{opt} ist eine Konstante, wenn der Propeller bei der richtigen Drehzahl bzw. das Modell bei richtiger Geschwindigkeit betrieben wird, C_T ist ein Maß für die Schubkraft und N_{100} ist die Drehzahl, bei der 100 Watt umgesetzt werden. Damit haben wir den Wirkungsgrad mit Konstanten ausgedrückt. Die Gleichung (17) ist aussagekräftig, wenn C_T und N_{100} bekannt sind.

Im folgenden soll die Gleichung noch so umgestellt werden, daß zwei Meßwerte zur Bestimmung des Wirkungsgrades ausreichen. Der erste Meßwert besteht aus der mechanischen Wellenleistung P_{wm} und der dazugehörigen Drehzahl N_p. Der zweite Meßpunkt beschreibt eine zweite Drehzahl N_s und den erzeugten Standschub S. Daraus ergibt sich für den Wirkungsgrad

$= f_{opt} * S * H * N_p^3/(P_{wm} * 60 * N_s^2)$, (18)

wobei N_p und N_s in upm und H in Metern einzusetzen sind. Etwas überraschend an dieser Gleichung finde ich die Proportionalität zwischen $\eta \sim H$. Zu Beginn bestand ja die Vermutung, daß der Wirkungsgrad mit zunehmenden Durchmesser der Luftschraube besser wird. Wie auch der Literatur zu entnehmen ist, steigt der Wirkungsgrad mit dem Verhältnis H/D.

Betrachtet man ein bestimmtes Modell so gibt es eine optimale Kraftfluggeschwindigkeit und eine Leistung, die man zum Fliegen haben möchte. Wählt man eine kleine Luftschraube, so wird sich diese Luftschraube relativ schnell drehen müssen, um die gewünschte Leistung von der Welle abzunehmen. Da mit der optimalen Fluggeschwindigkeit auch eine optimale Geschwindigkeit v_m vorliegt, ergibt sich ein geringer Anstieg der Luftschraube. Wird trotzdem ein großer Anstieg gewählt, wird f_{opt} kleiner und der gesamte Wirkungsgrad wird schlecht. Kann sich der Propeller langsamer drehen, z.B. durch ein Getriebe oder LRK Motor, so benötigt man einen größeren Propeller um die Leistung abzunehmen. Durch die kleinere Drehzahl benötigt man für gleiches v_m auch einen größeren Anstieg.

Jetzt fehlen nur noch einige Meßwerte, um die recht theoretischen Überlegungen zu belegen. Im Internet habe ich Werte für einige Slowflyer Luftschrauben gefunden. Folgende Tabelle zeigt den Wirkungsgrad für einige Luftschrauben.

Durchm. (Z)	Anstieg (Z)	N (upm)	Leistung (W)	Schub (N)	eta
7	6	7000	29,5	2,55	0,51
8	4,3	7000	30,5	3,18	0,44
8	6	6000	27,5	2,8	0,51
9	4,7	6500	43,0	4,35	0,43
9	7	5000	33,0	3,35	0,50
10	4,7	5000	40,0	4,5	0,37
10	8	4500	37,5	4,2	0,56
11	4,7	4500	37,5	4,6	0,36
12	6	3500	33,0	4,38	0,39
12	8	3000	27,2	3,85	0,47

Die Tabelle zeigt zwei Trends: Zum einem haben größere Luftschrauben kaum einen besseren Wirkungsgrad als kleine. Vergleicht man z.B. Luftschrauben mit einem H/D von ca. 0,5 (8x4,3; 9x4,7; 11x4,7; 12x6) so sind die Wirkungsgrade mit 0,44; 0,43; 0,37; 0,39 eigentlich am unteren Ende. Hierbei ist auch nicht ersichtlich, daß eine große Luftschraube einen besseren Wirkungsgrad hat. Vergleicht man die Luftschrauben mit einem H/D von ca. 0.75 (7x6, 8x6, 10x8, 12x8) so hat die Luftschraube 10x8 einen etwas besseren Wirkungsgrad als 7x6. Die Verbesserung macht aber gerade mal 10% aus. Von den 12 Zoll Luftschrauben fehlt ein Meßwert mit einer 10-ner Steigung, um diese Aussage weiter zu untermauern.

Diese Rechnung weist noch einen systematischen Fehler auf. Bei der Berechnung wurde die im Stand gemessene Wellenleistung mit der an das Modell abgegebene Leistung bei einer Anströmung verglichen. Da die aufgenommene mechanische Leistung bei einer angeströmten Luftschraube etwas kleiner ist, als im Stand, sind die absoluten Wirkungsgrade etwas zu schlecht. Ich habe aber bisher keinen Zusammenhang zwischen diesen Größen gefunden. Da dieser Fehler bei allen Luftschrauben gleichermaßen eingeht, sollte er keinen Einfluß auf den Vergleich der Luftschrauben haben.

Zusammenfassung

Der wichtigste Punkt bei der Optimierung des Propellers ist die Abstimmung zwischen der Kraftfluggeschwindigkeit v und der maximalen Propellergeschwindigkeit $v_{m.}$ Passen diese beiden Werte nicht zueinander, so sinkt der Wirkungsgrad erheblich ab. Eine große Unbekannt ist dabei die optimale Geschwindigkeit für den Kraftflug.

Es sollten Propeller mit einem großen H/D Verhältnis gewählt werden!

Kochrezept zur Dimensionierung des Antriebs:

1. Messen oder abschätzen der Modellgeschwindigkeit im Kraftflug. $v = \sqrt{(1{,}63*p/c_a)}$ mit c_a = 0,8, p ist die Flächenbelastung in N/m², 1,63 ist ein mittlerer Bodenluftwert.
2. Berechnen von $v_m = 1{,}8*v$
3. Bestimmen der Motorleistung und Leerlaufdrehzahl (Herstellerangaben)
4. Berechnung der Drehzahl unter Last $N_e=(U_n-R_i*I)*N_l$, wobei U_n die Nennspannung des Akkus ist, R_i ist die Summe der Innenwiderstände von dem Akkupack und dem Motor, I ist der Strom bei dem der Motor betrieben werden soll und N_l ist die Leerlaufdrehzahl des Motors pro Volt. Der Innenwiderstand des Motors wird manchmal durch die Blockierstromaufnahme angegeben. In diesem Fall kann er mit $R_i=U_n/I_B$ berechnet werden, wobei U_n die Nennspannung und I_B der Blockierstrom sind.
5. Berechnung der mechanischen Leistung (Wirkungsgrad des Motors)
6. Berechnung von N_{100} nach (3)
7. Berechnung der richtigen Steigung nach (7)
8. Auswahl einer Luftschraube mit entsprechenden N_{100} Wert und Steigung
9. Überprüfen des H/D Wertes. Ist er zu klein, benötigt man ein Getriebe oder einen Motor, der langsamer dreht.

Literatur:

[1] OskarCzepa, Die verflixte Luftschraubenanpassung. http://www.czepa.at/luftschraube.html
[2] Wilhelm Geck, Berechnung des Elektroantriebs – Luftschraube.